

Der Fixpunktsatz von Banach

von Hendrik Felix Pohl

Seien (M, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $\phi : M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Es existiere also $\lambda \in [0, 1)$ mit

$$d(\phi(a), \phi(b)) \leq \lambda \cdot d(a, b)$$

für alle $a, b \in M$.

Dann besitzt ϕ genau einen Fixpunkt x .

Speziell konvergiert die durch $x_{n+1} := \phi(x_n)$ definierte Folge für jedes $x_0 \in M$ gegen diesen Fixpunkt und es gelten folgende Fehlerabschätzungen:

- A-priori:

$$d(x_n, x) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_1, x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- A-posteriori:

$$d(x_n, x) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} d(x_n, x_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

Sei $x_0 \in M$. Wir definieren die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ durch $x_{n+1} := \phi(x_n)$.

Beh:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$$

Beweis per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

IA: Sei $n = 1$. Dann gilt: $d(x_2, x_1) = d(\phi(x_1), \phi(x_0)) \leq \lambda d(x_1, x_0)$.

IV: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS: Es gilt: $d(x_{n+1}, x_n) = d(\phi(x_n), \phi(x_{n-1})) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$.

Sei $\epsilon > 0$. Da $\lambda < 1$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_1, x_0) \frac{\lambda^{n_0}}{1 - \lambda} < \epsilon.$$

Seien $m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq n_0$. Mit der vorherigen Behauptung, der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe folgt:

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n) \\
&\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + d(x_{m-2}, x_n) \\
&\leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \\
&\leq \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^i d(x_1, x_0) \\
&\leq d(x_1, x_0) \sum_{i=n}^{\infty} \lambda^i \\
&= d(x_1, x_0) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \right) \\
&= d(x_1, x_0) \left(\frac{1}{1-\lambda} - \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} \right) \\
&= d(x_1, x_0) \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \\
&\leq d(x_1, x_0) \frac{\lambda^{n_0}}{1-\lambda} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Wir erhalten: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. Aus der Vollständigkeit von M folgt die Existenz eines Elementes $x \in M$ mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Als Kontraktion ist ϕ Lipschitz-stetig, also folgenstetig und es gilt:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \phi(x)$$

Damit haben wir einen Fixpunkt von ϕ bestimmt. Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen:

Angenommen, es existiere ein von x verschiedenes Element $y \in M$ mit $\phi(y) = y$. Dann gilt:

$$0 < d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y)) \leq \lambda d(x, y) < d(x, y)$$

Dieser Widerspruch liefert die Eindeutigkeit.

Aus der Abschätzung der Cauchy-Folge folgt zudem die a-priori-Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} d(x, x_n) &= \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(d(x_1, x_0) \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^i \right) \\ &= d(x_1, x_0) \sum_{i=n}^{\infty} \lambda^i \\ &= d(x_1, x_0) \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \end{aligned}$$

Der Beweis der a-posteriori-Abschätzung bleibt dem interessierten Leser als Übung überlassen.

□